III- On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2) a) Montrer que pour tout réel positif t, $t+1\geq 2\sqrt{t}$.

b) En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $F(x)\leq\frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-t}\ dt$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$\int_1^x (t+1)\,e^{1-t}\ dt=3-(2+x)e^{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $0\leq F(x)\leq\frac{3}{2}$.

3) On note pour tout $n\in IN^*$, S_n la somme des $(n-1)$ premier termes de la suite (u_n).

a) Justifier que pour tout $n\in IN^*$, $S_n=F(n)$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente. Donner un encadrement de la limite de S_n.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn